Übungsstunde 10:

- Das Eigenwertproblem:
  - ↳ Eigenwerte
  - ↳ Eigenvektoren
  - ↳ Bei symmetrischen Matrizen
- Anwendungen:
  - ↳ $\underline{\underline{A}}^k$
  - ↳ $e^{\underline{\underline{A}}}$
- Differentialgleichungssysteme

Das Eigenwertproblem:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underbrace{\lambda}_{\text{EW}}\,\underbrace{\underline{x}}_{\text{EV}} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \lambda \underline{x} = 0$$

$$\underbrace{(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})}_{\text{Möchten einen Rangverlust für nicht-triviale } \underline{x} \neq 0!}\underline{x} = 0 \quad \leftarrow \quad \underline{x} = 0$$

$$\Rightarrow \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) \stackrel{!}{=} 0$$

→ Charakteristisches Polynom

$$\Rightarrow Chp(\lambda) := \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \underline{(\lambda - a_1)^{k} (\lambda - a_2)^{l} (\dots)} \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\boxed{\stackrel{!}{=} 0} \qquad k + l + \dots = n$$

↳ gibt uns $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ EW von $\underline{\underline{A}}$

Bsp: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

EW: $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) \stackrel{!}{=} 0$

$$\underline{\underline{\lambda_1 = 2}}, \quad \underline{\underline{\lambda_2 = 1}}$$

Eigenschaften:

- ∃ mindestens 1 EW → In alle Richtungen mit demselben Faktor gestreckt
- ∃ maximal n EW → " " " " verschiedenen
- k & l sind die $\boxed{\text{algebraischen Vielfachheiten}}$ des jeweiligen

EW

- $\sum$ alg. Vielfachheiten $\overset{!}{=} n$
- EW einer $\boxed{\text{Dreiecksmatrix sind die Diagonalelemente}}$
- λ EW von $\underline{\underline{A}}$ $\Rightarrow$ λ^{-1} EW zu A^{-1} (falls inv.)
- spur$(\underline{\underline{A}})$ = $\sum$ EW mit jeweiligen alg. Vielfachheit

  $\hookrightarrow$ spur $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} + a_{22}$

<u>Eigenvektoren:</u>

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda \underline{x}$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})\,\underline{x} = 0$$

$\Rightarrow$ liefert uns die EV $\underline{x}$ zu den entsprechenden EW λ

Bsp.: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

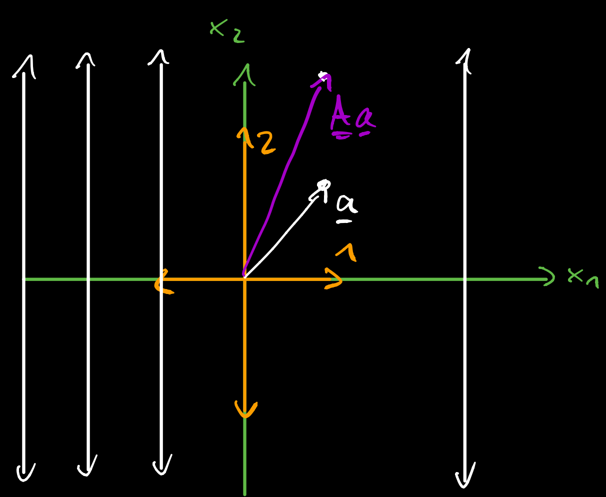
EW: $\lambda_1 = \underline{2}$, $\lambda_2 = \underline{1}$

EV:

λ_1: $(\underline{\underline{A}} - 2\underline{\underline{I}})\,\underline{x} = 0 \iff \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_1 = 0 \end{array}$

$\Rightarrow E_2 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$



λ_2: $(\underline{\underline{A}} - 1\underline{\underline{I}})\,\underline{x} = 0$

$\Rightarrow \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = t \\ x_2 = 0 \end{array}$

$\Rightarrow E_1 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Eigenschaften

- dim des Eigenraumes eines EW nennt man die $\boxed{\text{geometrische Vielfachheit}}$
- $\boxed{1 \leq \text{geom. Vielf.} \leq \text{alg. Vielf.} \leq n}$
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ paarweise verschieden $\to \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ sind linear unabhängig
- $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{T}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{T}} \Rightarrow \underline{\underline{A}}$ & $\underline{\underline{C}}$ ähnlich

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B} & \xrightarrow{A} & \tilde{B} \\ \uparrow & & \downarrow T^{-1} \\ B & \xrightarrow[C]{} & B \end{array}$$

$\Rightarrow$ Chp(λ) von $\underline{\underline{A}}$ = Chp(λ) von $\underline{\underline{C}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{A}}$ & $\underline{\underline{C}}$ haben dieselben EW

$\underline{x} \in$ EV von $\underline{\underline{A}}$

$\underline{y} = \underline{\underline{T}}^{-1} \underline{x} \in$ EV von $\underline{\underline{C}}$

- Falls $\forall i: \lambda_i$ alg. Vielf. $= 1 \Rightarrow \underline{\underline{A}}$ $\boxed{\text{einfach}}$
- Falls $\forall i: \lambda_i$ alg. Vielf. = geom. Vielf. $\Rightarrow \underline{\underline{A}}$ $\boxed{\text{halbeinfach}}$
  - ↳ $\underline{\underline{A}}$ halbeinfach $\to \underline{\underline{A}}^n$ & $\underline{\underline{A}}^T$ ebenfalls halbeinfach
  - ↳ $\underline{\underline{A}}$ einfach $\to \underline{\underline{A}}^n$ <u>nicht</u> unbedingt einfach

Diagonalisierbarkeit:

- $\exists\, \underline{\underline{T}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s.d. $\underline{\underline{T}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{D}} = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$

$\Rightarrow \underline{\underline{A}}$ diagonalisierbar

- Spalten von $\underline{\underline{T}}$ sind die EV von $\underline{\underline{A}}$
- Einträge in $\underline{\underline{D}}$ sind die <u>entsprechenden</u> EW von $\underline{\underline{A}}$

Achtet auf die Reihenfolge!

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- $\underline{\underline{A}}$ ist halbeinfach
- $\underline{\underline{A}}$ besitzt eine Eigenbasis
- $\underline{\underline{A}}$ ist diagonalisierbar

Eigenwertproblem symmetrischer Matrizen: $\underline{\underline{A}}$ symm.

- Alle EW von $\underline{\underline{A}}$ sind reell
- EV zu EW $\lambda_i \neq \lambda_j$ sind orthogonal!
- $\underline{\underline{A}}$ ist halbeinfach $\Rightarrow$ diagonalisierbar
- $\underline{\underline{A}}$ besitzt eine ONB als Eigenbasis
- $\underline{\underline{T}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{T}} = D \iff \underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{D}}$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{T}}\, \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{T}}^{-1}$$
$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{T}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{T}}$$

Anwendungen des Eigenwertproblemes:

$\underline{\underline{A}}^k \underline{x}$:

$$\underline{\underline{A}}^k = (\underline{\underline{T}}\, \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{T}}^{-1})^k$$
$$= (\underline{\underline{T}}\, \underline{\underline{D}} \underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1})(\underline{\underline{T}}}_{\underline{\underline{I}}} \underline{\underline{D}} \underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1})(\ldots}_{\underline{\underline{I}}})$$
$$= \underline{\underline{T}}\, \underline{\underline{D}}^k \underline{\underline{T}}^{-1}$$

$e^{\underline{\underline{A}}\underline{x}}$:

$$e^{\underline{\underline{A}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\underline{\underline{A}}^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(TDT^{-1})^n}{n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{TD^nT^{-1}}{n!} = T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!}\right)T^{-1}$$
$$= \underline{\underline{T}}\, e^{\underline{\underline{D}}}\, \underline{\underline{T}}^{-1}$$

Eigenschaften:

- $$e^{\underline{\underline{A}}^T} = \left(e^{\underline{\underline{A}}}\right)^T$$

- $$\frac{d}{dt}\left(e^{\underline{\underline{A}}t}\right) = \underline{\underline{A}}\, e^{\underline{\underline{A}}t}$$

- $$e^{\underline{\underline{D}}} = e^{\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}} = \underline{\underline{T}}^{-1} e^{\underline{\underline{A}}}\, \underline{\underline{T}}$$

- $$\det\left(e^{\underline{\underline{A}}}\right) = e^{\mathrm{spur}(\underline{\underline{A}})}$$

Lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung:

$$\left.\begin{aligned}
y_1' &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \cdots + a_{1n} y_n \\
y_2' &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \cdots + a_{2n} y_n \\
y_3' &= a_{31} y_1 \quad \ddots \\
&\vdots \\
y_n' &= a_{n1} y_1 \cdots\cdots + a_{nn} y_n
\end{aligned}\right|$$

AWP:

$$\begin{aligned}
y_1(0) &= y_{10} \\
y_2(0) &= y_{20} \\
&\vdots \\
y_n(0) &= y_{n0}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{y}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{y} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}(x) = e^{\underline{\underline{A}}x}\, \underline{y_0} = e^{\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}x}\, \underline{y_0} = \underline{\underline{T}}\, e^{\underline{\underline{D}}x}\, \underline{\underline{T}}^{-1}\, \underline{y_0}$$

$$\underline{y}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{y}$$

$$\underline{y}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{y}}_{\underline{z}} \qquad \Rightarrow \quad \underline{z} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{y}$$

$$\underline{y} = \underline{\underline{T}}\,\underline{z}$$

$$\underline{y}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{z} \quad \Big|\ \underline{\underline{T}}^{-1}\cdot$$

$$\underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{y}'}_{} = \underline{\underline{D}}\,\underline{z}$$

$$\underline{z}' = \underline{\underline{D}}\,\underline{z}$$

$$z_1' = d_1 z_1$$

$$z_2' = 0 + d_2 z_2$$

$$\vdots$$

$$z_n' = 0 + 0 + \ldots + d_n z_n$$

$\downarrow$ Eulerische Ansatz $\quad z = e^{\lambda x}$

$$z_1 = e^{d_1 x} z_{10}$$

$$z_2 = e^{d_2 x} z_{20}$$

$$\vdots$$

$$z_n = e^{d_n x} z_{n0}$$

Position ist wichtig!

$$\Rightarrow \quad \underline{z}(x) = e^{\underline{\underline{D}}x}\,\boxed{\underline{z}_0}$$

$$\rightarrow \quad \underline{y}(x) = \underline{\underline{T}}\,\underline{z}(x) = \boxed{\underline{\underline{T}}\,e^{\underline{\underline{D}}x}\,\underline{z}_0} \qquad \underline{z}_0 = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{y}_0$$

$$= \underline{\underline{T}}\,e^{\underline{\underline{D}}x}\,\underline{\underline{T}}^{-1}\,\underline{y}_0$$

$$= \boxed{z_{10}\, e^{\lambda_1 x} \begin{bmatrix}1\\ t_1\\ 1\end{bmatrix} + z_{20}\, e^{\lambda_2 x} \begin{bmatrix}1\\ t_2\\ 1\end{bmatrix} + \dots}$$

Bsp:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 6 & 2\end{bmatrix}, \quad \underline{y}(0) = \begin{bmatrix}0\\ 10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y_{10}\\ y_{20}\end{bmatrix}$$

$$\underline{y}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{y}$$

EW: $\det[\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}] \overset{!}{=} 0$

$$\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 1\\ 6 & 2-\lambda\end{bmatrix} \overset{!}{=} 0 = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6$$

$$= 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 6$$

$$= \lambda^2 \underbrace{-3\lambda}_{+} \underbrace{-4}_{\cdot}$$

$$= (\lambda \underline{-4})(\lambda \underline{+1})$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \underline{4}, \quad \lambda_2 = \underline{-1}$$

EV:

$\lambda_1 = 4$: $\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0\\ 6 & -2 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = s\\ x_1 = \frac{1}{3}s\end{array}$

$$\Rightarrow \underline{E_4 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}\right\}}$$

$\lambda_2 = -1$: $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0\\ 6 & 3 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = t\\ x_1 = -\frac{1}{2}t\end{array}$

$$\Rightarrow \underline{E_{-1} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}\right\}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y}(x) = z_{10}\, e^{d_1 x} \begin{bmatrix} \\ \underline{t}_1 \\ \\ \end{bmatrix} + z_{20}\, e^{d_2 x} \begin{bmatrix} \\ \underline{t}_2 \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{T}}\, \underline{z}_0 = \underline{y}_0 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 10 \end{array}$$

$$\xrightarrow{G.} \quad \left.\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & -5 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 10 \end{array} \qquad \begin{array}{l} z_{20} = \underline{-2} \\ z_{10} = \underline{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y}(x) = 2 e^{4x} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 2 e^{-x} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$